

水波の理論の数学的基礎

— 理論開拓者の業績を振り返る —

正会員 一色 浩*

Mathematical Basis in Wave Theory - Remembering Achievements of Pioneers
by Hiroshi Isshiki

Key Words: Water Wave Theory, Cauchy-Poisson Problem, Oscillating Source, Initial Value And Steady Problems

1. 緒言

Table 1 に船舶流体力学に関連する波の理論の比較的最近までの歴史を概観する。思いつくままに作成したもので厳密なものとは言いがたいが、船の波の理論が長い年月を経て形成されたことが理解されよう。水波の最も基本的な問題として初期値問題がある。時刻 0 において自由表面の変位および速度を指定すると、その後の波動は数学的に決定できる。この初期値問題のことをコーシー・ポアソン問題と言い^{1),2)}、フランス学士院の懸賞問題であったが、1815 年にコーシーが解決した。同じ年にポアソンも同じ結果を発表したので、コーシー・ポアソン問題と呼ばれている。簡単に言うと、コーシー・ポアソン問題というのは、静かな池に石を放り込むとどんな波紋が生ずるかという問題である。この問題は解析的に解ける数少ない問題の一つでもある。

Table 1 History of wave theory related to ship hydrodynamics.

西暦	船舶流体力学に関連する波の理論の歴史	世界の歴史
1687	ニュートンの法則	江戸幕府(1603)
1738	ベルヌーイの定理	
1755	オイラーの運動方程式	
1776	ラプラスの潮汐理論	
1788	ラグランジェによる速度ポテンシャル	フランス革命(1789)
1815	コーシー・ポアソン問題	
1828	無限流体中の物体の運動(ベッセル:付加質量)	
1869	ケルビンの渦定理(ヘルムホルツ, ラグランジェ)	明治維新(1868)
1887	ケルビン波	
1898	ミッチェル理論(薄型船の造波抵抗)	日露戦争(1904-1905)
1917	ハブロックによる没水円柱, 没水球の造波抵抗	第 1 次世界大戦(1914-1918)
1949	アーセルの半没円柱の理論	第 2 次世界大戦(1939-1945)
1955	Korvin-Krakovsky のストリップ法(渡辺 1958)	
1960	丸尾の波浪中抵抗増加理論	

コーシー・ポアソン問題は、特異点が一一定速度で前進するときの波動、いわゆるケルビン波を解明した 1887 年

* (有)数理解析研究所

原稿受付 平成 30 年 3 月 23 日

春季講演会において講演 平成 30 年 5 月 21, 22 日

©日本船舶海洋工学会

のケルビンの業績とともに、自由表面上を航行する船に関連する波動現象の理論的取り扱いの基礎となったと考えられよう。Table 1 にはその後の発展も示されているが、1960 年の丸尾の波浪中抵抗増加理論は線形理論の頂点に位置すると思える。

本論文においては、初期値問題であるコーシー・ポアソン問題の他に、船舶や海洋構造物の波浪中同様に重要な定常動揺問題についても、先人の努力の跡を辿ってみる。波動問題では理論式を得ること自体、簡単ではないことは当然であるが、理論式を基にどうやって計算するかも極めて重要である。計算機があれば力任せに計算することも可能かも知れないが、当時は筆算しか計算手段がなかった。そのような状況の中で停留位相法のようなものが考え出されたと思うが、先人の洞察力の凄さに驚き入るばかりである。

2. コーシー・ポアソン問題

流体力学のテキストとして有名な Lamb の大著には、コーシー・ポアソン問題に関して版により異なる説明がある。1895 年出版の第 2 版¹⁾では理論式の解説が主であるが、1916 年の第 4 版²⁾では計算法に多くのページが割かれている。

第 2 版の Art. 220 (379~380 ページ) には以下のように簡単に書かれている。

220. 一定水深 h の 2 次元有限水域において、自由表面変位 $\eta(x,t)$ および速度 $\partial\eta/\partial t = -[\partial\phi/\partial y]_{y=0}$ が、以下のように与えられる初期値問題を考える(本節の式の番号は Lamb の著書のままとする):

$$\eta = f(x), \tag{i}$$

$$-\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]_{y=0} = F(x). \tag{ii}$$

ここで、 $f(x)$ および $F(x)$ は既知の関数とする。このとき速度ポテンシャル $\phi(x,y,t)$ および自由表面変位 $\eta(x,t)$ は、無限水深の場合には

$$\phi = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{e^{ky}}{k} \left[\begin{aligned} & (gk)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^\infty d\lambda f(\lambda) \cos k(\lambda-x) \right\} \sin g^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} t \\ & - \left\{ \int_{-\infty}^\infty d\lambda F(\lambda) \cos k(\lambda-x) \right\} \cos g^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} t \end{aligned} \right], \tag{vi}$$

$$\eta = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \left[\begin{aligned} & \left\{ \int_{-\infty}^\infty d\lambda f(\lambda) \cos k(\lambda-x) \right\} \cos g^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} t \\ & + \frac{1}{g^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}}} \left\{ \int_{-\infty}^\infty d\lambda F(\lambda) \cos k(\lambda-x) \right\} \sin g^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} t \end{aligned} \right], \tag{vii}$$

で与えられる。

この結果が正しいのは、フーリエ変換の公式:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \left\{ \int_{-\infty}^\infty d\lambda f(\lambda) \cos k(\lambda - x) \right\}, \quad (v)$$

より明らかである。

238. 一方、第4版の Art. 238~241 (373~388) ページには、上述の理論の説明以外に計算法と計算結果のかなり詳しい解説がある。初期条件が

$$\eta = f(x), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

のとき、初期値問題の解は

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \sigma t dk \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha, \quad (6)$$

$$\phi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} dk \int_{-\infty}^\infty f(\alpha) \cos k(x - \alpha) d\alpha \quad (7)$$

で与え与えられる。ここで、 $\sigma = \sqrt{gk}$ である。Lamb の第4版では初期条件を

$$\eta = f(x), \quad \phi_0 = \phi(x, 0, 0) = 0$$

としているが、 $\Delta \phi(x, y, 0) = 0$ であるから $\phi_0 = \phi(x, 0, 0) = 0$ ならば $\phi(x, y, 0) = 0$ であるので $\phi_y(x, 0, 0) = 0$ となり、 $\eta_t = -\phi_y(x, 0, 0) = 0$ であるから、第2版の初期条件で $F(x) = 0$ とすればよい。

特に

$$\int_{-\infty}^\infty f(\alpha) d\alpha = 1, \quad (8)$$

とすると

$$\phi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx dk \quad (9)$$

となる。 $\sin \sigma t$ のテーラー展開により

$$\phi = \frac{gt}{\pi} \int_0^\infty \left\{ 1 - \frac{gt^2}{3!} k + \frac{(gt^2)^2}{5!} k^2 - \dots \right\} e^{ky} \cos kx dk \quad (10)$$

と書ける。曲座標：

$$-y = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \quad (11)$$

を導入して、 $y < 0$ のとき

$$\int_0^\infty e^{ky} \cos kx k^n dk = \frac{n!}{r^{n+1}} \cos(n+1)\theta \quad (12)$$

に注意すると、(10)式より

$$\phi = \frac{gt}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} gt^2 \right) \frac{\cos 2\theta}{r^2} \\ + \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{1}{2} gt^2 \right)^2 \frac{\cos 3\theta}{r^3} - \dots \end{array} \right\} \quad (13)$$

となる。これより

$$\eta = \frac{1}{g} \phi_t(x, 0, t) \\ = \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{gt^2}{2x} - \frac{1}{3 \cdot 5} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^3 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^5 - \dots \right\} \quad (14)$$

が求まる。

この式から η は $\frac{1}{2} gt^2/x$ の関数であるから波の位相 ($\frac{1}{2} gt^2/x = \text{const}$, すなわち $x \propto \frac{1}{2} gt^2$) は一定加速度で進むことが分かる。

(14)式は実質的には Fresnel の回折積分に現れるものと同じである。ただし、(14)式は $\frac{1}{2} gt^2/x$ の小なときには有効

であるが、小さくないときには収束が遅い。これに変わる式は以下のように求まる。

速度ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ の自由表面上の値は(9)式から

$$\phi_0 = \phi(x, 0, t) = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} \cos kx dk \\ = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} + \sigma t \right) d\sigma - \int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} - \sigma t \right) d\sigma \right\} \quad (15)$$

と書ける。ここで

$$\zeta = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}} \left(\sigma \pm \frac{gt}{2x} \right) \quad (16)$$

とすると

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} + \sigma t \right) d\sigma = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \int_\omega^\infty \sin(\zeta^2 - \omega^2) d\zeta, \quad (17)$$

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{\sigma^2 x}{g} - \sigma t \right) d\sigma = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \int_{-\omega}^\infty \sin(\zeta^2 - \omega^2) d\zeta \quad (18)$$

となる。ここで

$$\omega = \left(\frac{gt^2}{4x} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

となる。これより

$$\phi_0 = -\frac{2g^{\frac{1}{2}}}{\pi x^{\frac{1}{2}}} \int_0^\omega \sin(\zeta^2 - \omega^2) d\zeta \quad (20)$$

となる。

これより自由表面の変位は

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \frac{g^{\frac{1}{2}} t}{\pi x^{\frac{3}{2}}} \int_0^\omega \cos(\zeta^2 - \omega^2) d\zeta \quad (21)$$

$$= \frac{g^{\frac{1}{2}} t}{\pi x^{\frac{3}{2}}} \left\{ \cos \omega^2 \int_0^\omega \cos \zeta^2 d\zeta + \sin \omega^2 \int_0^\omega \sin \zeta^2 d\zeta \right\}$$

となる。これは Poisson の求めた結果と一致する。この定積分に $\sqrt{2/\pi}$ を掛けたものは Fresnel 積分であり、既知の関数である。

Lommel は(14)式に含まれる関数：

$$1 - \frac{z^2}{3 \cdot 5} + \frac{z^4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots \quad (22)$$

の $0 \leq z \leq 60$ の値を計算しているの、最初の 9~10 波の計算が簡単にできる。Lamb の第4版には、ある位置 x における η の時間変化とある時間 t における位置変化の図が載っている。

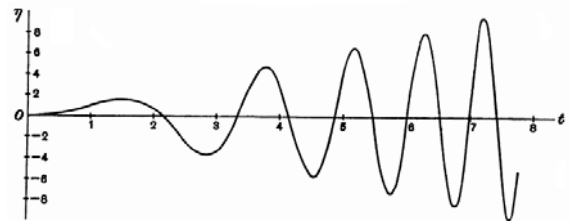


Fig.1 Surface elevation η at position x
(Horizontal axis: t)

gt^2/x が大きいときには(21)式より

$$\eta = \frac{g^{\frac{1}{2}}t}{2^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}} \left(\cos \frac{gt^2}{4x} + \sin \frac{gt^2}{4x} \right) \quad (23)$$

で近似される。この式は Poisson と Cauchy による。ここで

$$\int_0^{\infty} \cos \zeta^2 d\zeta = \int_0^{\infty} \sin \zeta^2 d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad (24)$$

が用いられた。

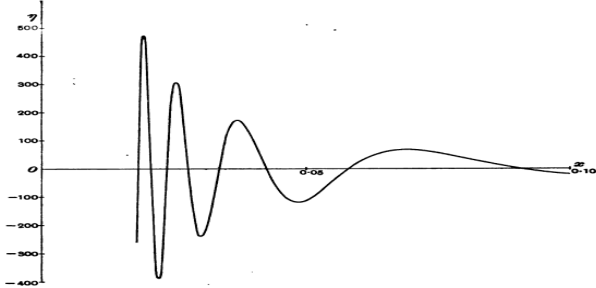


Fig.2 Surface elevation η at time t
(Horizontal axis: x)

漸近近似式は Poisson により

$$\eta \sim \frac{g^{\frac{1}{2}}t}{2^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}} \left(\cos \frac{gt^2}{4x} + \sin \frac{gt^2}{4x} \right) - \frac{1}{\pi x} \left\{ \frac{2x}{gt^2} - 1 \cdot 3 \cdot 5 \left(\frac{2x}{gt^2} \right)^3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \left(\frac{2x}{gt^2} \right)^5 - \dots \right\} \quad (25)$$

と求められた。

つぎに、初期条件が

$$\eta = 0, \quad \rho\phi_0 = \rho\phi(x, 0, 0) = F(x) \quad (29)$$

の場合について述べられているが、この部分 (Art. 239) は省略する。

240. 自由表面変位 η の初期値 $f(x)$ が与えられる最初のケースを例にとって、以上の結果について考察する。座標 x が十分に小さくするとき、波形は (23) 式で与えられる。したがって、原点に近づくほど波長は際限なく小さくなり、振幅は際限なく大きくなる。ある位置 x における表面変位 η の時間変化は Fig. 1 に示されているが時間 t が大きくなると、周期はどんどん小さくなり、振幅はどんどん大きくなる。時間 t が大きくなるときの η の変化は (23) 式で与えられる。

このとき波長と波高は徐々に変化するので、部分的には正弦波のようである。その周期 τ は

$$\Delta \frac{gt^2}{4x} = 2\pi \quad (39)$$

において、 t だけを変化させると、 $\Delta t = \tau$ により

$$\tau = \frac{4\pi x}{gt} \quad (40)$$

と求まる。 x だけを変化させると、波長を λ として $\Delta x = -\lambda$ により

$$\lambda = \frac{8\pi x^2}{gt^2} \quad (41)$$

となる。波の位相速度は

$$\Delta \frac{gt^2}{4x} = 0 \quad (42)$$

より

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2x}{t} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (43)$$

と求まる。

Lamb は部分的正弦波の周期、波長、波速を上のように求めているが、 $gt^2/4x = (gt/4x)t = (gt^2/4x^2)x$ より円周波数と波数が $gt/4x$ と $gt^2/4x^2$ となると考える方が簡単かも知れない。

群速度は位相速度の半分であるから、(43) 式より

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (44)$$

となるが、(23) 式から分かるように、一定の λ に対しては $1/\sqrt{x}$ に比例して変化する。

原点の近傍では (23) 式に従う。したがって、原点は一種の吹き出しと見做され、連続的に周期と振幅を増し続ける波を放出続ける。これは矛盾していない。初期的に一点に集中した有限の体積を仮定することは、原点に無限の(位置)エネルギーを与えることになるからである。

現実的には、有限の幅の所に有限の体積を与えることになり、原点近傍の波は時間の経過と共になくなる(この場合には与える位置エネルギーは有限である)。このことを詳しく考察してみよう。有限の幅を l とし、 l は微小要素 δa よりなるものとする、ある点 P の波は様々な要素の寄与を足したものである。これらの寄与は (6) 式、実際的には (14) 式、(21) 式、(23) 式を使って計算できよう。すると結果的に上述の矛盾が解消される。数式で示すことも簡単であろうが、以下のように一般的に説明する方が有益である。

l/x が小さい所(すなわち波源から離れた所)で考えると、初期段階では様々な要素 δa に起因する波が強め合うことになり、その結果は (14) 式あるいは (23) 式で与えられであろう。ただし、そのときの持ち上げられた流体の総面積は

$$\int_{-l/2}^{l/2} f(a) da$$

で与える。この状況では考えている点 x において波長 λ が幅 l より大きい (Lamb の本では積分範囲を $-\infty \leq a \leq \infty$ となっているが、適切でないと思われるので変更した)。

(41) 式から $(\frac{1}{2}gt^2/x) \cdot l/x$ の小さい状況である。しかし、

時間 t が大きくなると位置 x での波長 λ が幅 l と同等あるいはそれよりも小さくなり、 l の様々な場所からの寄与の位相がはっきりと違うようになって、光学的な意味での“干渉”のようなことになる。もちろん初期変位 $f(a)$ の影の影響もあるが、ついに振幅の増加が止み最終的には攪乱が消えてしまうことは明らかである。

241. Kelvin はもっと簡単な方法でもっと興味ある広い応用が可能な近似が得られることを示した。現在、停留位相の方法と呼ばれるものである。

下記の積分：

$$u = \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x) e^{if(x)} dx \quad (1)$$

を近似的に求めるものである。この積分において、 $e^{if(x)}$ は積分区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において激しく振動するが、 $\phi(x)$ はゆっくり変化するものとする (Lamb の本では $a \leq x \leq b$ となっているが、ミスと思われるので変更した)。このよ

うな場合、 $f(x)$ が停留するところを除いて、被積分関数の各点の値は干渉により打ち消しあう。点 a において $f'(a) = 0$ とし、 $x = a + \xi$ とすると

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}\xi^2 f''(a) \quad (2)$$

と近似される。 a の近傍の x がこの積分に主要な寄与をするので、この積分は

$$\phi(a)e^{if(a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}if''(a)\xi^2} d\xi \quad (3)$$

で近似される。被積分関数が振動するので、積分範囲を $-\infty < \xi < \infty$ としても顕著な誤差は生まない。既知の公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm im^2 \xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \cdot \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{m} \cdot e^{\pm \frac{1}{4}i\pi} \quad (4)$$

を用いると、(3)式は

$$\frac{\sqrt{\pi}\phi(a)}{\sqrt{\frac{1}{2}f''(a)}} \cdot e^{i\{f(a) \pm \frac{1}{4}\pi\}} \quad (5)$$

となる。ここで、正負の複号は $f''(a)$ の正負に従う。

もしも a が $a = \alpha$ または $a = \beta$ のとき、(3)式の積分範囲は $0 \leq \xi < \infty$ または $-\infty < \xi \leq 0$ で置き換えられ、(5)式の結果は半分になる。

(2)式の近似を続けると、つぎの項は $\frac{1}{6}\xi^3 f'''(a)$ となる。上述の方法は、 $\xi^2 f''(a)$ が 2π の数倍程度のときでさえ $\xi f'''(a)/f''(a)$ が小さい必要がある。そのためには

$$f'''(a)/\{|f''(a)|\}^{\frac{3}{2}}$$

が小さい必要がある。

目下考察している波動問題では、集中攪乱の影響は下記のような式：

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \phi(k) e^{i(\sigma t - kx)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \phi(k) e^{i(\sigma t + kx)} dk \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 σ は k の関数である(無限水深の場合は $\sigma = \sqrt{gk}$)。 $2\pi/\sigma$ は波長が $2\pi/k$ の規則波の周期である。最終的に(6)式の実部を取るものとする。

(6)式の2項は x の正と負の方向に可能なあらゆる波長の波を重ね合わせた結果を表わしている。対称性を考慮して原点の右側の領域のみを考慮するならば、一番目の積分の指数だけが停留値を与える。すなわち

$$t \frac{d\sigma}{dk} = x \quad (7)$$

が満足されるときである。

これにより、 k は x と t の関数になり、(5)式より ($f(k) = \sigma t - kx$, $f'(k) = t d\sigma/dk - x$, $f''(k) = t d^2\sigma/dk^2$, $f'''(k) = t d^3\sigma/dk^3$)

$$\eta = \frac{\phi(k)}{\sqrt{|2\pi t d^2\sigma/dk^2|}} \cdot \cos(\sigma t - kx \pm \frac{1}{4}\pi) \quad (8)$$

となる。ここで、正負の複号は $d^2\sigma/dk^2$ の符号に従う。この近似は

$$d^3\sigma/dk^3 \div \sqrt{|d^2\sigma/dk^2|^3} \quad (9)$$

が小さいことを前提とする。(7)式から

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma t - kx) = \left(t \frac{d\sigma}{dk} - x \right) \frac{\partial k}{\partial x} - k = -k \quad (10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma t - kx) = \left(t \frac{d\sigma}{dk} - x \right) \frac{\partial k}{\partial t} + \sigma = \sigma \quad (10b)$$

であるので、時刻 t における点 x の近傍においては、波長と周期は $2\pi/k$ と $2\pi/\sigma$ のようである。(7)式は群速度 (Art. 236) が x/t であることを示す。

Art. 238 の流体力学の問題では

$$\phi(k) = 1, \quad \sigma^2 = gk \quad (12)$$

であるので

$$d\sigma/dk = \frac{1}{2}g^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}, \quad d^2\sigma/dk^2 = -\frac{1}{4}g^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{3}{2}}, \quad d^3\sigma/dk^3 = \frac{3}{8}g^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{5}{2}} \quad (13)$$

となる。したがって、(7)式より

$$k = gt^2/4x^2, \quad \sigma = gt/2x \quad (14)$$

であるので

$$\eta = \frac{g^{\frac{1}{2}}t}{\sqrt{2\pi x^{\frac{3}{2}}}} e^{i(gt^2/4x - \frac{1}{4}\pi)}$$

を得る。実部を取ると

$$\eta = \frac{g^{\frac{1}{2}}t}{\sqrt{2\pi x^{\frac{3}{2}}}} \cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{1}{4}\pi\right) \quad (15)$$

となる。

(9)式の商は $(2x/gt^2)^{\frac{1}{2}}$ と同等であるので、この近似は $\frac{1}{2}gt^2$ が x と比べて大きいような時間と場所で正しい。

(15)式から分かるように、波列を見ると後方の波が前方の波よりも連続的に波長が減少し、またある点を通過する波を見ると波長が連続的に減少する。

3. 周期的吹き出しの速度ポテンシャル

周期的吹き出しの速度ポテンシャルを $\Phi(x, z, t)$ とすると、周期的吹き出しに関する初期値問題は以下のように定義される：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z^2} = \text{Re}[\delta(x-x')\delta(z-z')e^{i\omega t}] \quad \text{in } -\infty < x < \infty, \quad -\infty < z < 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } -\infty < x < \infty, \quad z = 0, \quad (2)$$

$$\Phi \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty, \quad (3)$$

$$\Phi \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

周期的吹き出しに誘起された流体運動の定常状態を $\phi(x, z)$ とすると

$$\Phi(x, z, t) = \text{Re}[\phi(x, z)e^{i\omega t}]. \quad (5)$$

と書ける。 $\phi(x, z)$ は以下の境界値問題の解である：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z^2} = \delta(x-x')\delta(z-z') \quad \text{in fluid}, \quad (6)$$

$$-\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on free surface}, \quad (7)$$

$$\phi \sim \text{out going wave as } x \rightarrow \pm\infty, \quad (8)$$

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow -\infty. \quad (9)$$

初期値問題および定常問題の解のいずれもそれぞれの難しい点がある。前者の困難は Riemann-Lebesgue の補助定理で、後者の困難は Rayleigh の仮想摩擦で克服される。Riemann-Lebesgue の補助定理はあとで出てくるが、付録 A で説明される。

Rayleigh の仮想摩擦について簡単に説明する．非圧縮流体の Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(\rho g z) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (10)$$

で与えられる．右辺第 3 項の $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ は粘性摩擦を表わす． ν は動粘性係数である．渦度 (vorticity) が保存されないため，この形のままで速度ポテンシャルを導入できない．Rayleigh は $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ を速度に比例する摩擦項 $-\mu \mathbf{u}$ で置き換えた．そうすると運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(\rho g z) - \mu \mathbf{u}. \quad (11)$$

となる．この方程式から，渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ が

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + \mu \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (12)$$

を満たすことが導かれる． $t=0$ で $\boldsymbol{\omega}=0$ ならば，その後もずっと $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ であり続ける．すなわち，渦度が保存されるので，速度ポテンシャル ϕ ：

$$\mathbf{u} = \nabla \phi. \quad (13)$$

が存在する．すると，運動方程式を積分すると，Bernoulli の方程式が

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\nabla \phi)^2 - \rho g z + \rho \mu \phi. \quad (14)$$

となるので，自由表面条件が

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

となる．このような仮想粘性力を導入すると，物理的に妥当な発散波を得ることができる．

4. 周期的吹き出しの表現

簡単のために 2 次元問題で説明する．座標原点にある停まっている吹き出しの速度ポテンシャル ϕ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \ln r &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + z^2} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|} e^{-|k||z| - ikx} dk \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa} e^{-\kappa|z| - ikx \cos \alpha} d\kappa \end{aligned} \quad (16)$$

で与えられる．したがって，位置 (x', y') にある円周波数 ω で振動する吹き出し速度ポテンシャル G は以下のようなになる：

$$\begin{aligned} G(x, z, x', z', t) &= \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2} \\ &\quad - \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x')^2 + (z+z')^2} + \Gamma(x, z, x', z', t) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで， Γ は

$$\begin{aligned} \Gamma(x, z, x', z', t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\kappa, x', z', t) e^{k|z| - ikx} dk \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=0}^{\pi} \int_0^{\infty} \gamma(\kappa, x', z', t) e^{\kappa z - ikx \cos \alpha} d\kappa \end{aligned} \quad (18)$$

とする． G は自由表面条件：

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + g \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0. \quad (19)$$

を満足しなければならない．(17)式を(19)式に代入と

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} e^{-ikx \cos \alpha} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \sum_{\alpha=0}^{\pi} g \kappa \gamma e^{-ikx \cos \alpha} \quad (20)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \sum_{\alpha=0}^{\pi} 2g e^{i\omega t} e^{\kappa z'} e^{-ik(x-x') \cos \alpha}$$

となる．これより

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial t} + g \kappa \gamma = -2g e^{i\omega t} e^{\kappa z' + ikx' \cos \alpha}. \quad (21)$$

を得る．この式には $t \rightarrow \infty$ における初期値の影響を除くために，仮想摩擦 ε ($\varepsilon \ll 1$) が入っている．

(21)式を解くためにインパルス応答 Λ ：

$$\frac{d^2 \Lambda(t)}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\Lambda(t)}{dt} + g \kappa \Lambda(t) = \delta(t) \quad (22)$$

を導入する．(24)式より

$$\Lambda(t) \approx \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{g\kappa}} e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{g\kappa} t) & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad (23a)$$

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} \approx \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ e^{-\varepsilon t} \cos(\sqrt{g\kappa} t) & \text{for } t \geq 0 \end{cases} \quad (23b)$$

と求まる．これより， $\gamma|_{t=-\infty} = 0$ および $\gamma_t|_{t=-\infty} = 0$ を満足する

$$\begin{aligned} \gamma(\kappa, x', z', t) &= -\int_{-\infty}^t 2g e^{i\omega \tau} e^{\kappa z' + ikx' \cos \alpha} \frac{1}{\sqrt{g\kappa}} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin(\sqrt{g\kappa}(t-\tau)) d\tau \\ &= -2\sqrt{\frac{g}{\kappa}} e^{\kappa z' + ikx' \cos \alpha} \int_0^{\infty} e^{i\omega(t-u)} e^{-\varepsilon u} \sin(\sqrt{g\kappa} u) du \end{aligned} \quad (24)$$

となる

(24)式を(17)式に代入すると

$$\begin{aligned} G(x, z, x', z', t) &= \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} \ln \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} \ln \sqrt{(x-x')^2 + (z+z')^2} + G_1 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (25)$$

$$G_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} du \sum_{\alpha=0}^{\pi} \int_0^{\infty} \left[\begin{aligned} &e^{i\omega(t-u)} e^{\kappa z' + ikx' \cos \alpha} \cdot \\ &\exp(\kappa z - ikx \cos \alpha - iu\omega) \cdot \\ &e^{-\varepsilon u} \sin(\sqrt{g\kappa} u) \sqrt{g/\kappa} \end{aligned} \right] d\kappa \quad (26)$$

と求まる．この式において u に関する積分を実施すると以下を得る：

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \exp(-iu\omega) e^{-\varepsilon u} \sin(\sqrt{g\kappa} u) du \\ &= \int_0^{\infty} \exp(-iu\omega) \frac{e^{-\varepsilon u}}{2i} \left[\exp(i\sqrt{g\kappa} u) - \exp(-i\sqrt{g\kappa} u) \right] du \\ &= \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\frac{\exp(-iu(\omega - \sqrt{g\kappa}) - \varepsilon u)}{\omega - \sqrt{g\kappa} - i\varepsilon} - \frac{\exp(-iu(\omega + \sqrt{g\kappa}) - \varepsilon u)}{\omega + \sqrt{g\kappa} - i\varepsilon} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{g\kappa} (\omega - \sqrt{g\kappa} - i\varepsilon)(\omega + \sqrt{g\kappa} - i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (27)$$

5. $\varepsilon = 0$ を仮定して得られる周期的吹き出しの定常状態の表現

(27) 式を (26) 式に代入すると

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{\pi} (I_0(\alpha) + I_-(\alpha) + I_+(\alpha)), \quad (28)$$

$$I_0(\alpha) = g \int_0^{\infty} e^{i\kappa z' + i\kappa x' \cos \alpha} \frac{\exp[\kappa(z - ix \cos \alpha)]}{\omega^2 - g\kappa} d\kappa$$

$$I_-(\alpha) = -\frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\kappa z' + i\kappa x' \cos \alpha} \exp[\kappa(z - ix \cos \alpha)]}{\left[\exp(-iu(\omega - \sqrt{g\kappa})) / (\omega - \sqrt{g\kappa}) \right] \sqrt{g/\kappa}} \right\} d\kappa$$

$$I_+(\alpha) = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\kappa z' + i\kappa x' \cos \alpha} \exp[\kappa(z - ix \cos \alpha)]}{\left[\exp(-iu(\omega + \sqrt{g\kappa})) / (\omega + \sqrt{g\kappa}) \right] \sqrt{g/\kappa}} \right\} d\kappa$$

(29a, b, c)

を得る. 積分 I_- および I_+ の κ に関する積分は Riemann-Lebesgue の補助定理:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F(\kappa) \exp[-iuf(\kappa)] [f(\kappa)]^{-1} d\kappa = -\pi i \sum F(\kappa_j) |f'(\kappa_j)|^{-1}, \quad (30)$$

で求まる. ここで

$$f(\kappa_j) = 0. \quad (31)$$

とする. この証明を付録に与える.

この補助定理を使うと G_1 が以下のように求まる.

$x - x' > 0$ のとき

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{\pi} (I_0(\alpha) + I_-(\alpha) + I_+(\alpha)) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa \cos \kappa(z+z') + K \sin \kappa(z+z')}{\kappa^2 + K^2} \exp(-\kappa(x-x')) d\kappa \\ &\quad + i \exp[K(z+z') - iK(x-x')]. \end{aligned} \quad (32)$$

$x - x' < 0$ のとき

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{\pi} (I_0(\alpha) + I_-(\alpha) + I_+(\alpha)) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa \cos \kappa(z+z') + K \sin \kappa(z+z')}{\kappa^2 + K^2} \exp(\kappa(x-x')) d\kappa \\ &\quad + i \exp[K(z+z') + iK(x-x')]. \end{aligned} \quad (33)$$

6. $\varepsilon > 0$ を仮定して得られる周期的吹き出しの定常状態の表現

$\varepsilon > 0$ とすると (31) 式の $I_-(\alpha)$ および $I_+(\alpha)$ は $u \rightarrow \infty$ のとき消えるので

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{i\kappa z' + i\kappa x' \cos \alpha} \exp[\kappa z - i\kappa x \cos \alpha]}{\int_0^{\infty} \exp[-iu\omega] \sin(\sqrt{g\kappa} u) du} \right\} \sqrt{\frac{g}{\kappa}} d\kappa \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sum_{\alpha=0}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{i\kappa z' + i\kappa x' \cos \alpha} \exp[\kappa z - i\kappa x \cos \alpha]}{\left((\omega - \sqrt{g\kappa} - i\varepsilon) (\omega + \sqrt{g\kappa} - i\varepsilon) \right)} \right\} \sqrt{\frac{g}{\kappa}} d\kappa \end{aligned} \quad (34)$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{g}{2\pi} \sum_{\alpha=0}^{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\exp(\kappa z' + i\kappa x' \cos \alpha) \cdot \exp[\kappa(z - ix \cos \alpha)]}{(\omega - \sqrt{g\kappa} - i\varepsilon)(\omega + \sqrt{g\kappa} - i\varepsilon)} \right] d\kappa \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp[\kappa(z+z') - i\kappa(x-x')]}{\kappa - K + i\mu} d\kappa \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp[\kappa(z+z') + i\kappa(x-x')]}{\kappa - K + i\mu} d\kappa \end{aligned} \quad (35)$$

と求まる. ここで $K = \omega^2/g$ および $\mu = 2\varepsilon\omega/g$ ある. μ は Rayleigh の仮想摩擦に相当する. (35) 式を複素積分で評価すると, (32), (33) 式と同じ結果を得る.

7 結 言

水波の理論の一側面を概観した. 先人の業績に改めて敬意を表したい. (35) 式を導く過程で Rayleigh の仮想摩擦に関する (12) 式を用いない新しい考え方を示した.

参 考 文 献

- 1) Lamb, H., Hydrodynamics, 2nd edn, Cambridge University Press, 1895, art. 220, pp.379-380. (<https://archive.org/details/hydrodynamics00horarich>)
- 2) Lamb, H., Hydrodynamics, 4th edn, Cambridge University Press, 1916, art. 238-241, pp.373-388. (<https://ia802701.us.archive.org/35/items/hydrodynamics02lambgoog/hydrodynamics02lambgoog.pdf>)

謝 辞

種々ご助言を頂いた大阪大学柏木正教授に深く感謝申し上げます.

付 録

Riemann-Lebesgue の補助定理

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F(\kappa) \exp[-iuf(\kappa)] [f(\kappa)]^{-1} d\kappa = -\pi i \sum F(\kappa_j) |f'(\kappa_j)|^{-1} \quad (30)$$

の証明

$$\begin{aligned} &\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F(\kappa) \exp[-iuf(\kappa)] [f(\kappa)]^{-1} d\kappa \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{\kappa_j - \varepsilon}^{\kappa_j + \varepsilon} F(\kappa) \exp[-iuf(\kappa)] [f(\kappa)]^{-1} d\kappa \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_j) \frac{\exp[-iuf'(\kappa_j)(\kappa - \kappa_j)]}{f'(\kappa_j)(\kappa - \kappa_j)} d\kappa \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_j) \frac{\exp[-iuf'(\kappa_j)\kappa]}{f'(\kappa_j)\kappa} d\kappa \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} -iuf'(\kappa_j)\kappa &= -iu \operatorname{sgn}(f'(\kappa_j)) |f'(\kappa_j)| \rho e^{i\theta} \\ &= u \rho \sin \theta \operatorname{sgn}(f'(\kappa_j)) |f'(\kappa_j)| - iu \rho \cos \theta \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(\kappa_j)) |f'(\kappa_j)| \end{aligned}$$

であるので, $\operatorname{sgn}(f'(\kappa_j)) > 0$ および $\operatorname{sgn}(f'(\kappa_j)) < 0$ のとき, 下および上半平面で複素積分する. このとき

$$\begin{aligned} &\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F(\kappa) \exp[-iuf(\kappa)] [f(\kappa)]^{-1} d\kappa \\ &= \mp \pi i F(\kappa_j) / f'(\kappa_j) = -\pi i F(\kappa_j) |f'(\kappa_j)|^{-1} \end{aligned}$$

であるので, (32) 式が証明された.