

船舶流体力学の分かり難いところ、面白いところ

—先人の努力の跡を偲んで—

正会員 一色 浩*

Difficult Points and Interesting Points in Ship Hydrodynamics

— In memory of the efforts of the predecessor —

by Hiroshi Isshiki, Member

Key Words: Distribution, Vortex Theorem, Memory Effect, Dispersion Equation

1. 緒言

近代の造船技術は、木材から鋼鉄、帆から熱機関、科学技術の導入により、画期的な発展を遂げた。とりわけ科学技術の導入は船舶工学の研究者、設計者にとって興味深いものがある。流体力学に限っても導入の歴史は教訓に溢れていると思う。

船舶流体力学には分かり難いところ、面白いところが多々ある。先人も同じような経験をされたことと思うし、今日我々がそれなりに理解できるのは、先人の努力に負うところが多いと思う。先人の努力の跡を偲ぶことは意味のあることであろう。

普段あまり気にしないで使っているものの中には、十分な理解はしていないが、必要に迫られて使っているものがいくつもある。こういうものは初学者にとっては大変難解で、彼らの学習意欲を大いに妨げているのではなからうか？初学者が理解に苦しむところは、先人も理解に苦しんだところと思う。多分、我々以上に苦しんだであろう。

例えば、簡単な例では渦なし運動と速度ポテンシャルとか、波の位相速度と群速度の違いとかである。重要な概念であり正しく理解しておくべきであるが、きちんと理解することがなかなか難しい。このようなもののいくつかについて述べてみたい。計算機万能の時代になって、最近では数学や力学のような基礎知識の理解が浅くなっていると思われる。多少なりとも若い人の理解の助けになれば幸いである。

2. 超関数と流体力学

まずこの話題で話を始めたい。いきなり

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right), \quad \text{for } a < 0 < b \quad (1)$$

を見せられるとびっくりしてしまう。しかし

$$\int_a^b \frac{1}{x^2} dx = -\int_a^b \frac{d}{dx} \frac{1}{x} dx = -\left[\frac{1}{x}\right]_a^b = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \quad (2)$$

と提示されたら、少なくともびっくりすることは無くなるであろう。

発散積分の有限部分を取ると言うこういう見方に意味があるのか？こういう見方を体系化するにはどうしたら良いか？という議論が始まると思う。そこで出てきたのが超関数の理論だと思う。関数の意味を通常の意味を超

えて考えることだと思う。力学では集中荷重というものがしょっちゅう出てくる。ただし、集中荷重は実際には存在しない仮想的なものであるが、とても便利なものである。しかし、通常関数はこれを包含できない。そこで、これを補うものとして生まれたものがデルタ関数 $\delta(x)$ という超関数だと思う。

先ず数学的な定義を与えねばならない。それは

$$\delta(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0 \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

for an arbitrary good function (4)

であったと思う。物事の定義は直接的、明示的に定義できれば分かり易いのであるが、それができなければ間接的に定義すれば良い訳である。good function $f(x)$ というのは、通常の意味で無限回連続微分可能で

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \quad (5)$$

であるような関数である。例えば

$$f(x) = e^{-a(x-b)^2} \quad (6)$$

のような関数である。力学の微分方程式などに導入するためには、微分を可能とする必要がある。そこで

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d\delta(x)}{dx} dx &= [f(x)\delta(x)]_{-\infty}^{+\infty} \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} \delta(x) dx = -\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=0} = -f'(0) \end{aligned} \quad (7)$$

のように考える。この式を見やすく整理すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d\delta(x)}{dx} dx = -f'(0) \quad (8)$$

である。(4)式が $\delta(x)$ の定義であったように、これを微分 $\delta'(x)$ の定義とする。

何故に超関数 $1/x^2$ の積分を(1)式のように考えるかであるが、一次元の重力を例にとると分かり易いと思う。単位質量の物質が $x=0$ にあるとし、その左右 $\pm x$ にも単位質量の物質が1個ずつあるとする。この二つの物質の位置エネルギーは重力係数を1とすると

$$\begin{aligned} \int_0^{+x} \frac{1}{x^2} dx - \int_0^{-x} \frac{1}{x^2} dx &= \left[-\frac{1}{x}\right]_0^{+x} - \left[-\frac{1}{x}\right]_0^{-x} \\ &= \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{0}\right] - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{0}\right] = -\frac{2}{x} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。一方

$$\begin{aligned} \int_0^{+x} \frac{1}{x^2} dx - \int_0^{-x} \frac{1}{x^2} dx &= \int_0^{+x} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-x}^0 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \int_{-x}^{+x} \frac{1}{x^2} dx \end{aligned} \quad (13)$$

* (有)数理解析研究所

原稿受付 平成29年3月24日

春季講演会において講演 平成29年5月23, 24日

©日本船舶海洋工学会

であるから

$$\int_{-x}^{+x} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{2}{x} \quad (14)$$

となる。(1)式を適用しても同じ結果になる。

さらに言うと、(12)式はバネの場合と同様に原点を基準にしているが、重力の位置エネルギーは無限遠を基準にして考える。右側の単位質量の位置エネルギーは

$$-\int_{+\infty}^{+x} \frac{1}{x^2} (-dx) = \int_{+\infty}^{+x} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{+\infty}^{+x} = -\frac{1}{x} \quad (15)$$

左側の単位質量に対しても同じであるので、左右 2 個の位置エネルギーも同じ値になる、(14)式と矛盾しない。左右対称を考慮すると 1 個の単位質量の持つ位置エネルギーは、(14)式より超関数的には

$$\int_0^x \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \quad (16)$$

とすべきであろう。

3. 渦定理と速度ポテンシャル

摩擦が無ければせん断応力は発生せず圧力しか働かないから、流体粒子には回転力は働かず、角運動量は保存される。最初に零ならばずっとゼロである。数学的には渦の運動方程式がこのことを示す。

3.1 ケルビンの渦定理、ヘルムホルツの渦定理、ラグランジュの渦定理

流体は非粘性でバロトロピック ($\rho = \rho(p)$)、外力は保存力を仮定すると 3 種類の渦定理が成り立つ。しかもこれらは同等である。

(1) ケルビンの渦定理

流体とともに動く閉曲線に沿う循環は時間的に不変である。すなわち

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0, \quad \Gamma = \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} \quad (17)$$

この証明は、バロトロピック性 $\rho = \rho(p)$ を用いてオイラーの方程式を

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Omega = -\nabla \int \frac{dp}{\rho} - \nabla\Omega \quad (18)$$

と書き直し、循環の定義式：

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} \quad (19)$$

に代入すると得られる。右辺第 1 項は

$$\oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_{C(t)} d \left(\int \frac{dp}{\rho} + \Omega \right) = 0 \quad (20)$$

右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot \frac{Dd\mathbf{l}}{Dt} &= \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot \frac{D(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{Dt} \\ &= \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \oint_{C(t)} v^2 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

故に

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (22)$$

(2) ヘルムホルツの渦定理

ヘルムホルツの渦定理は以下を主張する。

- 渦線を構成する流体粒子は、時間が経過しても同じ渦線を構成する。
- 渦管の強さは時間が経過しても、変化しない。

接線が常に渦度ベクトルに比例するような曲線を渦線と呼ぶ。また、流体中に小さな閉曲線を考えその閉曲線を通過する渦線の作る面で囲まれた管状の領域を渦管という。渦管の表面に経路をとって計算した循環の値は、どこでも等しい。これを渦管の強さという。渦管の断面で渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ を面積分すると

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int \text{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma \quad (23)$$

であるので、ケルビンの渦定理より上述の b. が言える。

(3) ラグランジュの渦定理

ラグランジュの渦定理は、渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ の輸送方程式に外ならない。Euler の運動方程式を書き直すと

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \left(\int \frac{p}{\rho} + \Omega \right) \quad (24)$$

となる。この式のローテーションを取ると渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の輸送方程式が得られる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = 0$$

$$\text{or } \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad (25)$$

従って、任意の流体要素の渦度が零ならば、その流体要素の渦度はその後も零である。

実はケルビン、ヘルムホルツ、ラグランジュの渦定理は同等であり、どれか一つから他の二つが導かれる。ラグランジュの渦定理が最も簡明であり質点系力学の角運動量保存則に対応している。

3.2 速度ポテンシャル

非粘性でバロトロピックな流体の保存力下の運動は、渦定理により初期的に渦なしならば、ずっと渦なしになる。すなわち、速度ポテンシャル ϕ が存在する：

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \nabla \phi \quad (26)$$

である。 $\mathbf{u} = \nabla \phi$ であれば $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ は $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ であるので簡単に示せる。 $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ のときに速度ポテンシャル ϕ が存在することは Stokes の積分定理による。すなわち、流れ場に固定点 $P_0(\mathbf{x}_0)$ と動点 $P(\mathbf{x})$ をとり、 P_0 から経路 C を経て P に至る線積分：

$$\phi = \int_{x_0}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} \quad (27)$$

を考えると、単連結領域ならば ϕ は経路 C によらないことが Stokes の積分定理により示せるので、 $\phi = \phi(\mathbf{x})$ とできるからである。多重連結領域の場合には、経路の取り方で定数分の差が生ずる。

非圧縮流体 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) に関しては、Kelvin の原理および Dirichlet の原理と呼ばれる興味ある変分原理がある。Kelvin の原理は「連続な流れの中で、運動エネルギーを最小にする流れは非回転な流れである。」を主張するものであり、Dirichlet の原理は「非回転な流れの中で、運動エネルギーを最大にする流れは連続な流れである。」を主張する。

Kelvin の原理において、連続な流れの中でという拘束条件を $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ とすると、変分原理は

$$I[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = \min \quad (28a)$$

$$\text{under } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } V \text{ and } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = f \text{ on } S \quad (28b)$$

となる。 ϕ を未定乗数として Lagrange の未定乗数法を適用すると

$$I^*[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV + \iiint_V \phi \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (29)$$

$$- \iint_S \phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - f) dS = \text{stationary}$$

となる。これの変分を取ると

$$0 = \delta I^* = \iiint_V (\mathbf{u} - \nabla \phi) \cdot \delta \mathbf{u} dV + \iiint_V \delta \phi \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (30)$$

$$- \iint_S \delta \phi (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - f) dS = \text{stationary}$$

であるので、Kelvin の原理の自然条件は非回転流 $\mathbf{u} = \nabla \phi$ となる。

Dirichlet の原理において、非回転な流れの中でという拘束条件を $\mathbf{u} = \nabla \phi$ とすると、変分原理は

$$K[\phi] = -\frac{1}{2} \iiint_V \nabla \phi \cdot \nabla \phi dV + \iint_S \phi f dS = \max \quad (31a)$$

$$\text{under } \mathbf{u} = \nabla \phi \text{ in } V \quad (31b)$$

となる。この変分原理の変分を取ると自然条件は

$$\nabla^2 \phi = 0 \text{ in } V, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = f \text{ on } S \quad (32)$$

となり、連続流になる。

4. 時間領域と周波数領域での浮体の運動

…メモリエフェクトについて

4.1 付加質量 A 、ダンピング μ 、復元力 k が周波数の関数でない場合
運動方程式を

$$(M + A) \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + \mu \frac{dZ(t)}{dt} + kZ(t) = F(t) \quad (33)$$

とする。 $Z(t)$ と $F(t)$ のフーリエ変換 $\hat{Z}(\omega)$ と $\hat{F}(\omega)$ を

$$\hat{Z}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(t) e^{-i\omega t} dt \quad (34a)$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (34b)$$

とすると、逆変換は

$$Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{Z}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (35a)$$

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\omega \hat{Z}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (35b)$$

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -\omega^2 \hat{Z}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (35c)$$

となる。

これらを時間領域の運動方程式に代入すると

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\omega^2 (M + A) \hat{Z}(\omega) + i\omega \mu \hat{Z}(\omega) + k \hat{Z}(\omega) - \hat{F}(\omega) \right] e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad (36)$$

となるので、周波数領域の運動方程式は

$$(-\omega^2 (M + A) + i\omega \mu + k) \hat{Z}(\omega) = \hat{F}(\omega) \quad (37)$$

となり、これより $\hat{Z}(\omega)$ が以下のように求まる。

$$\hat{Z}(\omega) = \frac{\hat{F}(\omega)}{-\omega^2 (M + A) + i\omega \mu + k} \quad (38)$$

4.2 付加質量 A 、ダンピング μ が周波数の関数である場合

周波数領域の運動方程式を

$$-\omega^2 [M + \hat{A}(\omega)] \hat{Z}(\omega) + i\omega \hat{\mu}(\omega) \hat{Z}(\omega) + k \hat{Z}(\omega) = \hat{F}(\omega) \quad (39)$$

とする。 $\hat{A}(\omega)$ と $\hat{\mu}(\omega)$ のフーリエ逆変換 $A(t)$ と $\mu(t)$ は

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (40a)$$

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (40b)$$

で与えられる。

ここで、 $A(t)$ と $\mu(t)$ の物理的な意味を考えてみよう。

$\hat{A}(\omega)$ は単位振幅の加速度運動 $e^{i\omega t}$ の付加慣性力であり、単位振幅の加速度運動は時間領域では

$$\sqrt{2\pi} \delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (41)$$

により衝撃的加速度運動 $\sqrt{2\pi} \delta(t)$ であるので、 $A(t)$ は衝撃的加速度運動 $\sqrt{2\pi} \delta(t)$ による付加慣性力に外ならない。

フーリエ変換の積は時間領域ではコンボリューションになるので

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(\omega) \hat{Z}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau) Z(t - \tau) d\tau \quad (42)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A(t - \tau) Z(\tau) d\tau$$

と書ける。 $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t}$ を周波数領域の運動方程式の両辺に作用すると、時間領域の運動方程式は

$$M \ddot{Z}(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau) \ddot{Z}(t - \tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\tau) \dot{Z}(t - \tau) d\tau + kZ(t) = F(t) \quad (43)$$

となる。因果律により積分区間が $[-\infty, +\infty]$ から $[-\infty, t]$ となり

$$M \ddot{Z}(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t A(t - \tau) \ddot{Z}(\tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \mu(t - \tau) \dot{Z}(\tau) d\tau + kZ(t) = F(t) \quad (44)$$

になる。

5. 位相速度と群速度

5.1 分散方程式

水槽で造波機を一定周波数で数周波数分動かすと、Fig. 1 に示すような packet wave が発生する。この波を観察すると、個々の波の速度は波全体の進む速度よりも速いことが分かる。個々の波の進む速度を位相速度、波全体の進む速度を群速度と言う。群速度は波エネルギーの伝播する速度である。詳しく観察すると、Packet の頭で波が消え、お尻で発生している。実に面白い。

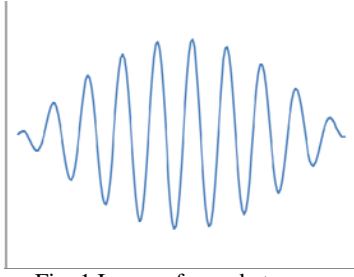


Fig. 1 Image of a packet wave

規則波とは時間方向および空間方向への規則的な繰り返し現象である。時間的な繰り返しを表わすものが周波数 ω であり、空間的な繰り返しを表わすものが波数ベクトル \mathbf{k} である。等方的な場合には、波数ベクトル \mathbf{k} の絶対値である波数 k を考えればよい。周波数 ω と波数 k の関係を与える $k = k(\omega)$ を分散方程式と呼ぶ。波数 k と波長 λ の関係は $\lambda = 2\pi/k$ で与えられる。

周波数 ω で波数 k の波と、周波数 $\omega + \Delta\omega$ で波数 $k + \Delta k$ の波との合成波はビート波になる。すなわち

$$\zeta = \sin(kx - \omega t) + \sin((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t) \\ = 2\sin(kx - \omega t)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \quad (45)$$

となる。(45)式より位相速度 c_p は $c_p = \omega/k$ であるが、群速度 c_g は

$$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega(k)}{dk} \quad (46)$$

であることが分かる。群波の波形を Fig. 2 に示す。

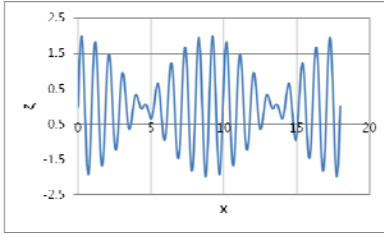


Fig. 2 Pattern of a group wave ($k = 2\pi$, $k + \Delta k = 2\pi/0.9$)

深海波の分散方程式は、自由表面条件：

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (47)$$

に、自由波の速度ポテンシャル $\phi = e^{kz} e^{i(kx - \omega t)}$ を代入して得られる

$$k = \frac{\omega^2}{g} \quad \text{or} \quad \omega = \sqrt{gk} \quad (48)$$

である。従って、位相速度 c_p と群速度 c_g は

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} = \frac{g}{\sqrt{gk}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (49)$$

$$c_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{d\sqrt{kg}}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c_p \quad (50)$$

で与えられる。これより波の速度と波数との関係、位相速度と群速度の関係が分かる。

5.2 表面張力波

下の(51a)式は重力と表面張力の両方が存在する場合の分散方程式である。重力定数 g の掛かっている項を除けば、表面張力だけの式になる。重力波は波長が大きくなると位相速度も群速度も大きくなる。表面張力波の位

相速度はこれと逆で、波長が大きくなると伝播速度が小さくなる。群速度は波長と関係なく一定である。重力と表面張力の両方が存在する場合には、位相速度には最小値が存在する。以下の式で重力係数 g 、表面張力係数 K の掛かっている項が、それぞれ重力波と表面張力波の項である。

$$\omega^2 = gk + \frac{Kk^2}{\rho}, \quad c_p^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} + \frac{Kk}{\rho} \quad (51a, b)$$

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = g + \frac{2Kk}{\rho} \rightarrow c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{g + \frac{2Kk}{\rho}}{\sqrt{gk + \frac{Kk^2}{\rho}}} \quad (52)$$

5.3 位相速度と群速度が逆方向になる場合

一様流中での重力波を考えると、位相速度と群速度が逆方向になる場合が出て来て面白い。例えば、波の中を前進する船から、船の造る波を観察するとこのような場合が出てくる¹⁾。

一様流が $x = +\infty$ から $x = -\infty$ に向かう、すなわち左向きの流れで、流速を U とする。簡単のために水深は無限度とする。一様流中での分散方程式は、自由表面条件：

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (53)$$

に、左に進む自由波の速度ポテンシャル $\phi = e^{kz} e^{i(kx + \omega_e t)}$ を代入して得られる

$$(\omega_e - Uk)^2 - kg = 0$$

$$\text{or } U^2 k^2 - (g + 2\omega_e U)k + \omega_e^2 = 0 \quad (54)$$

である。ここで $K_0 = g/U^2$ 、 $\tau = \omega_e U/g$ である。この式は波数 k に関する2次方程式である。これを解くと

$$k = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases} = \frac{(g + 2\omega_e U)}{2U^2} \pm \sqrt{\frac{g}{2U^2} \frac{(g + 4\omega_e U)}{2U^2}} \\ = \frac{g}{2U^2} \left(1 + \frac{2\omega_e U}{g} \right) \pm \frac{g}{2U^2} \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_e U}{g}} \quad (55) \\ = \frac{K_0}{2} (1 + 2\tau \pm \sqrt{1 + 4\tau})$$

が求まる。右に進む自由波の速度ポテンシャル $\phi = e^{kz} e^{i(-kx + \omega_e t)}$ を代入すると、分散方程式は

$$(\omega_e + Uk)^2 - kg = 0$$

$$\text{or } U^2 k^2 - (g - 2\omega_e U)k + \omega_e^2 = 0 \quad (56)$$

で与えられ

$$k = \begin{cases} \beta_1 \\ \beta_2 \end{cases} = \frac{(g - 2\omega_e U)}{2U^2} \pm \sqrt{\frac{g}{2U^2} \frac{(g - 4\omega_e U)}{2U^2}} \\ = \frac{g}{2U^2} \left(1 - \frac{2\omega_e U}{g} \right) \pm \frac{g}{2U^2} \sqrt{1 - 4 \frac{\omega_e U}{g}} \quad (57) \\ = \frac{K_0}{2} (1 - 2\tau \pm \sqrt{1 - 4\tau})$$

となる。 $\tau > 1/4$ のときには β_1 、 β_2 は複素数であるので自由波を与えない。

以下では $\tau < 1/4$ とする。従って位相速度が左向きの波数 α_1 と α_2 の2波および位相速度が右向きの波数 β_1 と β_2 の2波、合計4個の進行波が存在する。

静止流体中での位相速度 c_{p0} と群速度 c_{g0} を求めると、 α_1 波に対しては

$$c_{p0}^2 = \frac{g}{k} = \frac{2U^2}{\left(1 + \frac{2\omega_e U}{g}\right) + \sqrt{1 + 4\frac{\omega_e U}{g}}} \quad (58)$$

$$< \frac{2U^2}{2\left(1 + \frac{2\omega_e U}{g}\right)} < U^2$$

$$c_{p0} < U, \quad c_{g0} = \frac{c_{p0}}{2} < \frac{U}{2} < U \quad (59)$$

β_1 波に対しては、 $\tau < 1/4$ を考慮すると

$$c_{p0}^2 = \frac{g}{k} = \frac{2U^2}{\left(1 - \frac{2\omega_e U}{g}\right) + \sqrt{1 - 4\frac{\omega_e U}{g}}} \quad (60)$$

$$< \frac{2U^2}{\frac{1}{2}} < 4U^2$$

$$U < c_{p0} < 2U, \quad c_{g0} = \frac{c_{p0}}{2} < U \quad (61)$$

となる。4 個の波の中で静止流体中で左方向に進む波は α_2 波だけで、他の 3 個の波は静止流体中では右方向に進む波である。そのうち β_1 波は $c_{p0} > U$ および $c_{g0} < U$ であるから、船に相対的な座標では位相速度は右に群速度は左に進む波になる。他の 3 個の波では、位相速度の方向と群速度の方向は一致する。図にすると Fig. 3 のようになる。

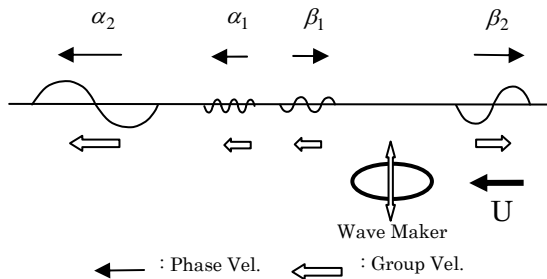


Fig. 3 Waves generated by a wave maker in a uniform flow when $\tau < 0.25$.

5.4 位相速度は光速を超えても良い。群速度は光速を超えられない。

空気と水の界面のように屈折率の大きいものから小さいものに入るとき、全反射が起こる。地上から発射された電波は電離層で反射されるので、電離層は屈折率が小さい。つまり、位相速度が速い。GPS の電波は電離層を通過する。プラズマの分散方程式から計算されるように、群速度は位相速度よりも小さく光速を超えることはない。

5.5. Schrodinger の方程式

Schrodinger の方程式は量子力学の最も重要な基礎方程式の一つであるが、Schrodinger がどのようにしてこの方程式を導いたのかははっきりしないように思われる。光子や電子のような粒子は粒子としての側面と Fig. 1 に示されるような波動としての側面の 2 面性をもっているが、波動の分散方程式を導くと Schrodinger の波動方程式を導くことができる。

量子力学の初期の歴史で最も重要と思われるいくつか

を挙げると下記のようならう。

- 黒体放射…エネルギー量子…Planck (1900)
- 光電効果…光子量子仮説…Einstein (1905)
- 光子の実験的検証…Millikan (1915)
- 物質波の仮説…De Broglie (1924)
- 物質波の実験的検証…Davisson-Germer (1927)

まず Einstein の光子に関する仮説は、粒子のエネルギー E と波の周波数 f の関係を与える：

$$E = hf \quad \text{or} \quad E = \hbar\omega \quad (62)$$

ここで、 h は Planck 定数で、 $\omega = 2\pi f$ および $h = 2\pi\hbar$ である。

De Broglie は Einstein の光子仮説を拡張して、物質波の仮説を提唱し運動量ベクトル \mathbf{p} と波数ベクトル \mathbf{k} の間に

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (63)$$

という関係が成り立つとした。この関係は光子の場合に成り立つ下記の関係から導かれた。

$$E = \hbar\omega = cp \rightarrow p = h\frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (64)$$

一方、Newton によると粒子のエネルギーは

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (65)$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{x} は粒子の位置ベクトルであり、 m は粒子の質量、 $\mathbf{p}^2/(2m)$ は運動エネルギー、 $V(\mathbf{x})$ はポテンシャルエネルギーである。(62)式と(63)式を(65)式に代入すると、下記の分散方程式が得られる。

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \quad (66)$$

分散方程式から波動方程式を導くために、波動方程式が以下のような自由波：

$$\phi = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \quad (67)$$

を持つと仮定する。すると

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega, \quad \nabla = i\mathbf{k} \quad \text{or} \quad \omega = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = -i\nabla. \quad (68)$$

(7)式を(5)式に、Schrodinger 方程式：

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{x})\right)\phi \quad (69)$$

が求まる。

6. 波漂流力のない浮体

浮体が完全に波に乗っていると水との相対運動がないので、波漂流力ゼロになるであろう。この状態は入射波が 100%透過する状態であるので、Cloaking 状態²⁾でもある。

入射波の水面変位を ζ_0 とし、速度ポテンシャルを ϕ_0 とする：

$$\zeta_0 = A_0 e^{i(Kx + \omega t)}, \quad \frac{\partial\zeta_0}{\partial x} = iKA_0 e^{i(Kx + \omega t)},$$

$$\phi_0 = i\frac{g}{\omega} A_0 e^{Kz + i(Kx + \omega t)} \quad (70)$$

ここで、 A_0 、 K 、 ω は入射波の振幅、波数、円周波数である。簡単のためにヒープとピッチの連成はないとする。Fig. 4 に示されるような passive control system を有する浮体の、波の中での運動を考える。

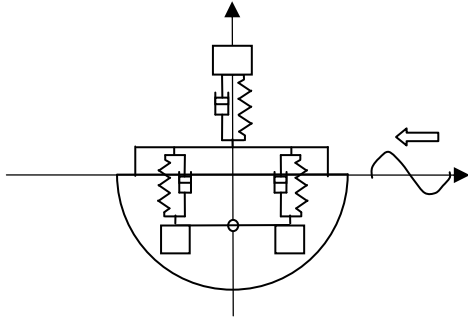


Fig. 4 Floating body with a passive control system composed of masses, springs and dampers.

バネ・ダンパー系が浮体に及ぼす力とモーメントを F_3 , M_5 とすると浮体の運動方程式は

$$-\omega^2(M + A_{33})Z + i\omega B_{33}Z + C_{33}Z = A_0E_3 + F_3 \quad (71a)$$

$$-\omega^2(I + A_{55})\Theta + i\omega B_{33}\Theta + C_{33}\Theta = A_0E_5 + M_5 \quad (71b)$$

となる。ヒープマスの運動は

$$-\omega^2 M_{HV} Z_{HV} + i\omega \mu_{HV} (Z_{HV} - Z) + k_{HV} (Z_{vw} - Z) = 0 \quad (72a)$$

$$i\omega \mu_{HV} (Z_{HV} - Z) + k_{HV} (Z_{HV} - Z) = F_3 \quad (72b)$$

となり、ピッチマスの運動は

$$-\omega^2 I_{PT} \Theta_{PT} + 2i\omega \mu_{PT} l \Theta_{PT} + 2k_{PT} l \Theta_{PT} = 0 \quad (73a)$$

$$2i\omega \mu_{PT} l (\Theta_{PT} - \Theta) + 2k_{PT} l (\Theta_{PT} - \Theta) = M_5 \quad (73b)$$

で与えられる。運動方程式から F_3 と M_5 を消去して整理すると

$$-\omega^2(M + A_{33})Z + i\omega B_{33}Z + C_{33}Z = A_0E_3 + i\omega \mu_{HV} (Z_{HV} - Z) + k_{HV} (Z_{HV} - Z) \quad (74a)$$

$$-\omega^2(I + A_{55})\Theta + i\omega B_{33}\Theta + C_{33}\Theta = A_0E_5 + 2i\omega \mu_{PT} l (\Theta_{PT} - \Theta) + 2k_{PT} l (\Theta_{PT} - \Theta) \quad (74b)$$

$$-\omega^2 M_{HV} Z_{HV} + i\omega \mu_{HV} (Z_{HV} - Z) + k_{HV} (Z_{HV} - Z) = 0 \quad (74c)$$

$$-\omega^2 I_{PT} \Theta_{PT} + 2i\omega \mu_{PT} l (\Theta_{PT} - \Theta) + 2k_{PT} l (\Theta_{PT} - \Theta) = 0 \quad (74d)$$

となる。

波と干渉しない条件、すなわち、波に乗った状態

$$Z = A_0, \quad \Theta = iKA_0 \quad (75)$$

を代入し、さらにエネルギー吸収なしの条件

$\mu_{HV} = \mu_{PT} = 0$ を代入すると、4個の未知数 Z_{HV} , Θ_{PT} , k_{HV} , k_{PT} に対して4個の方程式があるので、 k_{HV} , k_{PT} を決定できよう。

ここで、波強制力項を

$$A_0E_3 \approx A_0(-\omega^2 A_{33} + i\omega B_{33} + C_{33}) \quad (76a)$$

$$A_0E_5 \approx iKA_0(-\omega^2 A_{55} + i\omega B_{55} + C_{55}) \quad (76b)$$

で近似すると、上の4個の方程式は

$$-\omega^2 MA_0 = k_{HV} (Z_{HV} - A_0) \quad (77a)$$

$$-\omega^2 liKA_0 = 2k_{PT} l (\Theta_{PT} - iKA_0) \quad (77b)$$

$$-\omega^2 M_{HV} Z_{HV} + k_{HV} (Z_{HV} - A_0) = 0 \quad (77c)$$

$$-\omega^2 I_{PT} \Theta_{PT} + 2k_{PT} l (\Theta_{PT} - iKA_0) = 0 \quad (77d)$$

となる。

(77a)式+(77c)式および(77b)式+(77d)式より

$$-\omega^2 M_{HV} Z_{HV} - \omega^2 MA_0 = 0 \quad (78a)$$

$$-\omega^2 I_{PT} \Theta_{PT} - \omega^2 liKA_0 = 0 \quad (78b)$$

であるので

$$Z_{HV} = -\frac{M}{M_{HV}} A_0 \quad (79a)$$

$$\Theta_{PT} = -\frac{I}{I_{PT}} iKA_0 \quad (79b)$$

となる。(1)式と(3)式より

$$k_{HV} = -\frac{\omega^2 MA_0}{Z_{HV} - A_0} = \frac{\omega^2 M}{\frac{M}{M_{HV}} + 1} = \frac{\omega^2 M_{HV}}{1 + \frac{M_{HV}}{M}} \quad (80a)$$

$$k_{PT} = -\frac{\omega^2 liKA_0}{2l(\Theta_{PT} - iKA_0)} = -\frac{\omega^2 liKA_0}{2l\left(-\frac{I}{I_{PT}} iKA_0 - iKA_0\right)} = \frac{\omega^2 I_{PT}}{2l\left(1 + \frac{I_{PT}}{I}\right)} \quad (80b)$$

7. 結 言

船舶流体力学の学習、研究の中で経験したことの中で、著者が個人的に興味を持ったことを、思いつくままに述べてみた。今日の科学技術は信じがたいほどの高度な水準に到達している。すべて先人の努力のお陰であり、貴重な文化的遺産である。

我々はこれらを正しく後世に伝えていかねばならない。直接的な効用だけでなく、その根底にある先人の卓抜した物事の捉え方をも忘れることなく伝えるべきであろう。

参考文献

- 1) 関野博, 木原一, 鈴木勝男: 回流水槽における動揺制板の造波特性について, 関西造船協会論文集, 第236号, 2016/09, pp.71-80, 2016/09.
- 2) M. Kashiwagi and M. Miki, "Realization of Cloaking and Wave-Energy Absorption with Multiple Floating Bodies", AIAM Symp., (Jan/2017)