

調和解析器について

正会員 鈴木 敏 夫* 正会員 内 藤 林*
 正会員 池 渕 哲 朗** 正会員 坪 郷 尚***
 正会員 勝 井 辰 博****

On a Mechanical Harmonic Analyzer

by Toshio Suzuki, *Member* Shigeru Naito, *Member*
 Tetsuro Ikebuchi, *Member* Takashi Tsubogo, *Member*
 Tokihiro Katsui, *Member*

Key Words: Harmonic Analyzer, Planimeter, Fourier Analysis, William Thomson, A. OTT

1. 緒 言

ある図形（あるいは関数 $\phi(x)$ で囲まれた）の面積を機械的に求めるプランメータは良く知られている。その関数 $\phi(x)$ に三角関数（正弦関数や余弦関数）を乗じた関数 $\phi(x)\sin(kx)$ や $\phi(x)\cos(kx)$ の面積を求める事ができれば、 $\phi(x)$ をフーリエ級数展開した時のフーリエ係数が求められる。この器具が調和解析器である。この器具の発明者は、船の定常造波問題で有名な英国のケルビン卿である。この器具を学会関西支部の造船資料保存委員会は（株）クボタから寄付を受け、「調和解析器調査会（委員長鈴木敏夫大阪大学名誉教授）」を立ち上げた。その原理を調査し、与えた簡単な波形（規則波形と不規則波形）をその器具を使って解析した。得られた結果は、与えた波形の振幅、位相に良く一致した。それらの結果と共にケルビン卿の多方面の活躍の一端を紹介する。ケルビン卿がこの器具について“*On the Instrument for Calculating $\int \phi(x)\psi(x)dx$, the Integral of the Product of two given Functions*”¹⁾と記し、 $\phi(x)$ として計測波形、 $\psi(x)$ として正弦、余弦関数を使えば積分ができ、フーリエ係数を求める解析器になる事を語っている。

2. 調和解析器調査の経緯

本学会関西支部の造船資料保存委員会は、2013年7月、（株）クボタ・堺・エンジン技術部より「A. OTT, KEMPTEN, BAYERN, 2449, GERMANY」と刻印された“ある物品”の寄贈を受けた。造船資料保存委員会の調査によりこの物品が「調和解析器」であることが判明した。その後、同委員会にてこの機器の調査をすることが決まり、同年9月、著者らで構成される「調和解析器調査会」が発足した。そして約1年半に及ぶ調査を経て2015年5月、調査結果を報告書²⁾としてまとめた。本論文はこの報告書を要約したものである。

* 大阪大学名誉教授

** 兵庫県立大学

*** 大阪府立大学

**** 神戸大学

原稿受付 平成29年3月24日

春季講演会において講演 平成29年5月23, 24日

©日本船舶海洋工学会

3. 調和解析器の機構と原理

調和解析器は、ある関数 $\phi(x)$ に正弦、余弦関数を乗じた関数の面積を求めてフーリエ係数を求める装置である。そのため、次の二つの機構、

- 1) 積分計算を機械的に行う装置—いわゆる積分器—
 - 2) ある関数 $\phi(x)$ に三角関数を掛ける機構
- から成っている。1)の積分器はよく知られたプランメータ (Planimeter, 面積計) である³⁾。2)の部分を経理的に処理している部分が今回の調査対象である。以下では、この2)の部分について解明した機構および原理等を紹介する。なお、調和解析器の組立方法や歯車の設置法、各種設定や使用法については割愛したので、報告書²⁾を参照されたい。

3.1 調和解析器の構成部品と機構

Figure 1に調和解析器の模式図を、Figs. 2, 3に組立途中の調和解析器の様子を、Figs. 4, 5に歯車とプランメータを取付けた様子をそれぞれ示す。これらの図において、①, ②, …等で付番されている各部品について説明する。

- ① 基準レール：関数 $\phi(x)$ のグラフのy軸方向と平行に設置する（空間固定）。
- ② 移動系 A：Fig. 1において赤色で描かれている三角形（山型）の部品。基準レール（①）上をレール方向（y方向）にのみ移動可能。
- ③ 移動系 Aa：Fig. 1において青色で描かれている小台車で、移動系 A（②）上に搭載されており、梃子 FKS（④）の K 点まわりの回転とスコッチヨーク（S）機構により、移動系 A 上で y 方向にのみ相対移動可能。Figs. 2, 3 では梃子 FKS の回転によって移動系 Aa が移動系 A 上で動いた時の様子である。梃子 FKS の回転がなければ、すなわち K 点の y 方向移動のみでは、移動系 Aa は移動系 A 上では相対移動しない。
- ④ 梃子 FKS： $\angle FKS = \pi/2$ （角度固定）、 $\overline{FK} = m$ （可変）、 $\overline{KS} = l$ 。S 点は移動系 Aa（③）上の溝内を x 方向に移動が可能。K 点は移動系 A（②）の先端にあり、梃子 FKS は K 点を中心に回転可能である。ポイント F 点の変位の x 方向変位成分のみが移動系 Aa を移動系 A 上で y 方向に相対移動させ、移動系 A 上に設置されている歯車⑤を回転させる。
- ⑤ 歯車：移動系 A 上に装着される。フーリエ係数の次数に対応した種々の径を持った歯車がある。移動系 Aa の y 方向相対移動の動きがこの歯車の回転

に伝達される。Fig. 4では、写真で見えている歯車の裏側にも歯車（ピニオン）があり、これが移動系 Aa 側の歯切り平板（ラック）と組合う。歯車上に刻印されている「S」, 「C」の近くの穴（Figs. 4,5 中の赤丸部分）は、プランメータのトレース点 P_S, P_C を設置するためのものである。

- ⑥ プランメータ作動台：白色の四角い台で基準レベルと連結され固定（空間固定）。
- ⑦ プランメータ：Fig. 7はプランメータのトレース点を歯車の穴にセットした状態。
- ⑧ 波形データ：解析される計測波形 $\phi(x)$ のグラフ

3.2 調和解析器の作動原理とフーリエ係数

この機器の核心は、波形追跡ポイント F 点の動きと歯車の回転（したがってプランメータのトレース点がどのように動くか）の関係を知る事にある。以下、この点に注目し説明する（Fig. 1を参照）。波形データの長さ a と、梃子 FKS の $FK=m$ が等しくなるよう長さ m を調整し、また K 点が $x=a/2$ に来るようにグラフを配置したとする。

ポイント F 点が y 方向にだけに動いた場合、②移動系 A, ③移動系 Aa は一緒に動くので歯車⑤（半径 R ）の回転角 β は変らない。プランメータのトレース点 P_S をセットする穴がある歯車⑤は、両移動系と共に一緒に上下するだけである。

ポイント F 点が x 方向にだけに動いた場合、K 点は $x=a/2$ （初期配置）の線上を動き、梃子 FKS は K 点まわりに回転する。この K 点まわりの回転が、S 点を通じたスコッチヨーク機構により③移動系 Aa を y 方向に動かす。この相対移動により歯車⑤が回転する。

$x=0$ で $\beta=0$ となるように初期セットしたとき、F 点が x 方向に x 動いたときの歯車⑤の回転角 β は、以下のようになる。

$$\beta = \frac{lx}{Rm} \quad (1)$$

プランメータのトレース点 P_S は歯車の回転 β により、移動系 A 上で相対移動する。歯車半径 R と歯車中心からトレース点 P_S, P_C の穴までの距離 r ($R>r$) が少しだけ違うことに注意すると、この相対移動量は、

$$y \text{ 方向} : r \cdot \sin \beta \quad ; \quad x \text{ 方向} : r(1 - \cos \beta) \quad (2)$$

空間固定系でのトレース点 P_S の移動量は式(2)の y 方向のみ K 点の移動量が追加されることになる。

次に、計測波形を追跡するポイント F 点の動きを、以下のように幅 Δx 、高さ $\phi(x)$ の短冊領域を時計回りに周回する場合を考える。

- ① 或る x に於いて y 方向に関数値 $\phi(x)$ だけ動き、
- ② 次に x 方向に Δx 動き、
- ③ 次に y 方向に $-\phi(x)$ だけ動き、
- ④ 最後に x 方向に $-\Delta x$ 動き、最初の位置に戻る。

この時、歯車の微小回転 $\Delta\beta$ と空間固定系でのトレース点 P_S の移動量は、

- ① $\Delta\beta = 0$, y 方向に関数値 $\phi(x)$ だけ動き、
- ② 式(1)より $\Delta\beta = \frac{l}{Rm} \Delta x$, 式(2)より
x 方向に $(r\Delta\beta)\sin\beta$, y 方向に $(r\Delta\beta)\cos\beta$, 動き、
- ③ $\Delta\beta = 0$, y 方向に $-\phi(x)$ だけ動き、
- ④ 式(1)より $\Delta\beta = -\frac{l}{Rm} \Delta x$, 式(2)より

x 方向に $(r\Delta\beta)\sin\beta$, y 方向に $(r\Delta\beta)\cos\beta$, 動き、最初の位置に戻る。

即ち、プランメータが面積計算する図形は、辺の長さが $\phi(x)$ と $r\Delta\beta$ とで構成される平行四辺形で、その微小面積 ΔA は以下ようになる。

$$\Delta A = \phi(x)r\Delta\beta \cdot \sin \beta \quad (3)$$

式(1)の関係を代入すると、

$$\Delta A = \phi(x) \frac{rl}{Rm} \Delta x \cdot \sin \frac{l}{Rm} x \quad (4)$$

これより、ポイント F 点を短冊 $\phi(x)\Delta x$ の周辺に沿って時計回りに周回し、元の位置まで戻れば、プランメータはフーリエ正弦係数に相当する量を算出してくれることがわかる。式 (4) と対応する操作を、それぞれ足し合わせる。式 (4) の方は、

$$A_S = \frac{rl}{Rm} \int_{x=0}^{x=a} \phi(x) \sin \frac{l}{Rm} x dx \quad (5)$$

操作の方は、ポイント F 点のある起点 $(0,0)$ から $(0,\phi(0))$ までトレースし、波形データ $(x,\phi(x))$ に沿った後、 $(a,\phi(a))$ から $(a,0)$, $(a,0)$ から起点 $(0,0)$, の周回トレースが残ることになる。即ち、ポイント F 点を波形データ $\phi(x)$ に沿って時計回りに周回し、元の位置まで戻れば、プランメータはフーリエ正弦係数に相当する式 (5) の値を算出してくれる。

n 次用歯車の半径を R_n とし、この歯車のトレース点 P_S の動く半径を r_n とおく⁴⁾。式 (4) あるいは式 (5) において波数に相当する部分を、

$$\frac{l}{R_n m} = \frac{2n\pi}{a} \quad (6)$$

となるように調整したとする ($l=20\text{cm}$ であるので、 a に対応して m の長さを調整することになる)。このとき式 (5) は、

$$A_S = n\pi r_n \frac{2}{a} \int_0^a \phi(x) \sin \frac{2n\pi}{a} x dx = n\pi r_n S_n \quad (7)$$

歯車上にある余弦用トレース点 P_C の穴の位置は $\pi/2$ だけ回転しており、式 (3) において $\beta \rightarrow \beta + \pi/2$ とおくと以下の結果が得られる。

$$A_C = n\pi r_n \frac{2}{a} \int_0^a \phi(x) \cos \frac{2n\pi}{a} x dx = n\pi r_n C_n \quad (8)$$

これより、プランメータによる積分値 A_C, A_S からフーリエ係数が以下のように換算できる。

$$C_n = \frac{A_C}{n\pi r_n}, \quad S_n = \frac{A_S}{n\pi r_n} \quad (9)$$

なお、歯車の中心点と P_C 点、 P_S 点の間の距離 r_n を実測したところ以下のとおりであった。

$$r_1 = 3.20\text{cm}, \quad r_2 = 1.60\text{cm}, \quad r_3 = 1.06\text{cm}, \quad r_4 = 0.80\text{cm}$$

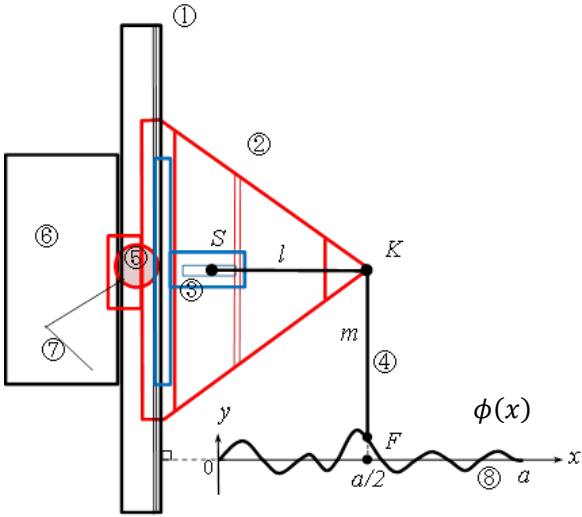


Fig. 1 Schematic view of the *Harmonic Analyzer*.

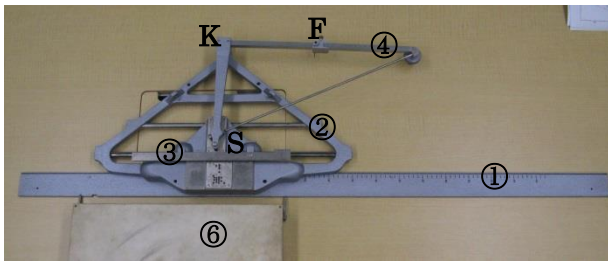


Fig. 2 Photo of the *Harmonic Analyzer* under construction.

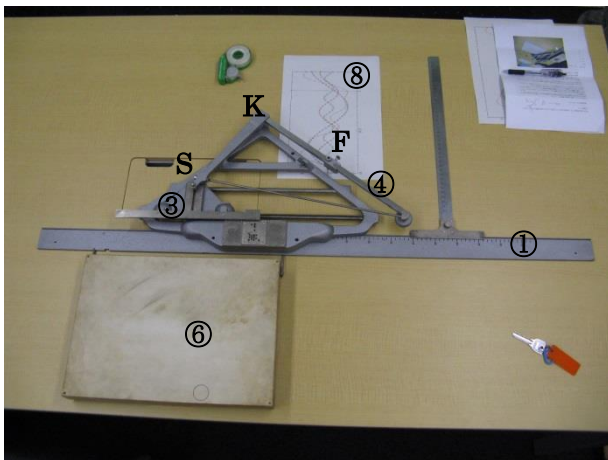


Fig. 3 Photo of adjusting lever ratio, FK and setting to the origin, O.

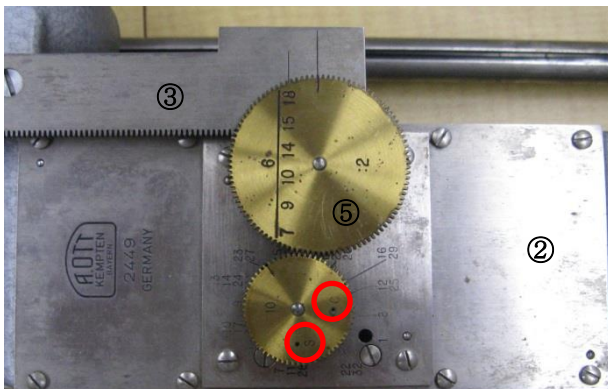


Fig. 4 Photo of setting gear wheels for the 10th Fourier coefficients.

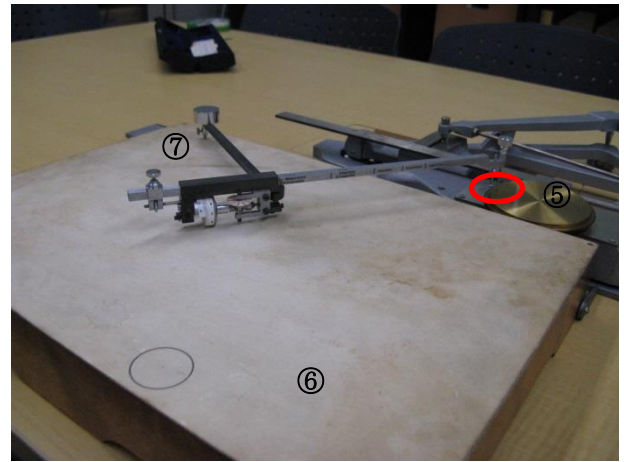


Fig. 5 Photo of setting the *Planimeter*.

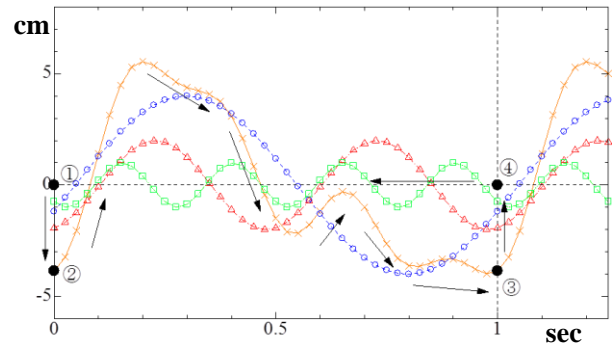


Fig. 6 A test function made by 3 harmonic functions.

$$\begin{aligned} \varsigma(t) &= \sum_{i=1}^4 A_i \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}t + \varepsilon_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^4 \left[\frac{A_i \cos \varepsilon_i}{S_i} \sin\left(\frac{2\pi}{T_i}t\right) + \frac{A_i \sin \varepsilon_i}{C_i} \cos\left(\frac{2\pi}{T_i}t\right) \right] \quad (10) \end{aligned}$$

Table 1 Periods, amplitudes and phases of harmonic element functions.

i	T_i [sec]	A_i [cm]	ε_i [rad]
1	1	4	-0.3
2	0.5	2	-1.3
4	0.25	1	-2.3



Fig. 7 Photo of calculating Fourier coefficients of a given test function, Eqn.10, by the *Harmonic Analyzer*.

4. 不規則波形の周波数解析例（フーリエ係数算出）

調和解析器を用いた周波数解析を検証するために、具体的な規則波および不規則波を用意して周波数解析を実施した。即ち与えた規則波や不規則波形のフーリエ係数を調和解析器で求め、設定したパラメータと一致するかどうかを調べた。規則波データについての検証は報告書²⁾を参照していただくこととし、以下では不規則波形の解析例について紹介する。

4.1 不規則波形データ

与えた不規則波形を構成する要素波形（正弦波）の、振幅、周期、位相は Table 1 に示すとおりである。位相は進みを正とし、与えた位相は負、即ち位相遅れとして与えた。不規則波形は、周期 1 秒の 1 次成分、周期 0.5 秒の 2 次成分、周期 0.25 秒の 4 次成分で構成されており、これらの波の合成（式（10））により不規則波形データを作製した。作成した不規則波形、および 3 つの要素波形のグラフを Fig. 6 に示す。紙に出力したときに、縦軸（波高）は実寸[cm]、横軸（時間）は 1sec が 20cm となるように作成した。×印（オレンジ）が不規則波形、その他はそれを構成する要素波形で、○印が 1 次成分、△印が 2 次成分、□印が 4 次成分である。

なお、式（10）中の S_i 、 C_i の部分が、それぞれ sin 項、cos 項の係数として計測される数値と対応する値である。

4.2 調和解析器の初期設定

Figure 7 のポイント F 点の位置をスライドさせ m が 1sec の長さ（この場合は 20cm）になるように調整した。ポイント F の位置が最もレール側になるところまで移動させたとき、F 点がグラフの原点に一致するように、グラフ位置を調整した。なお、グラフの横軸は機器が設置されている基準レールに垂直になるように設置する必要があるが、これは付属の T 定規を用いれば容易である。

次に、求めたい成分の歯車を移動系 A に設置した。cos 成分ならプランメータの針先（トレース点）を歯車の「C」の穴に、sin 成分なら「S」の穴に入れる。

また、プランメータの設定は 1/10 とした。プランメータの数値（積分値）を 1/10 倍すると cm^2 の単位で面積を算出できることになる。

4.3 調和解析器による不規則波形データの解析

Figure 6 中の矢印で示すように①→②→③→④→①の順でポイント F 点を解析対象の不規則波形に沿って移動させ、各番号の点でその都度プランメータの目盛を記録した。この時、①→②、③→④の時、K 点は上下するが歯車⑤は一緒に上下し回転しない。

この周回トレース作業は、フーリエ係数の次数毎に対応する歯車を付け変え、また cos 成分、sin 成分に応じてプランメータのトレース点を設置し直し、行っている。

(1) C_1 , S_1

計測は 2 回行ったが結果は以下の通りであった。

1 回目

cos 成分: ①8,642→④8,709→①8,520 となり、差は-122。

故に、 $C_1 = -12.2\text{cm}^2 / (1\pi r_1) = -1.21\text{cm}$

sin 成分: ①9,445→④0,151→①9,826 となり、差は+381。

故に、 $S_1 = 38.1\text{cm}^2 / (1\pi r_1) = 3.79\text{cm}$

2 回目

cos 成分: ①8,523→④8,595→①8,406 となり、差は-117。

故に、 $C_1 = -11.7\text{cm}^2 / (1\pi r_1) = -1.16\text{cm}$

sin 成分: ①8,774→④9,480→①9,147 となり、差は+373。

故に、 $S_1 = 37.3\text{cm}^2 / (1\pi r_1) = 3.71\text{cm}$

ここで、分母の 1 は 1 周期成分（1 次成分）で、歯車のトレース点配置の半径は $r_1 = 3.20\text{cm}$ である。

1 周期成分波の振幅 A_1 は、正弦成分 S_1 、余弦成分 C_1 の二乗和の平方、

$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + S_1^2} \quad (11)$$

で求められる。その結果、1 回目の計測結果は $A_1 = 3.98\text{cm}$ 、2 回目の計測結果は $A_1 = 3.89\text{cm}$ となった。その平均値は、 3.94cm である。

計測の位相差は式(10)の様に sin 波形で表現すると、

$$\varepsilon_1 = \tan^{-1}\left(\frac{C_1}{S_1}\right) \quad (12)$$

で求められる。その結果、1 回目の計測結果は $\varepsilon_1 = -0.309\text{rad}$ 、2 回目の計測結果は $\varepsilon_1 = -0.303\text{rad}$ となった。その平均値は、 -0.306rad である。

即ち、計測結果は以下のとおりである。

振幅=3.94cm, 位相=-0.306rad(遅れ)

この計測結果は、与えた不規則波の 1 周期成分

振幅=4.00cm, 位相=-0.300rad(遅れ)

と比較しても概ねよい一致が得られている。なお、不確かさ解析は実施していないが、誤差の主要因は、ポイント F 点でグラフを正確にトレース出来ていない点だと考えている。

(2) C_n , S_n

同様な解析法で高周波成分を求めた結果を Table 2 に示す。概ね良好な結果が得られている（与えた不規則波形には含まれていない 3 次成分、8 次成分の解析も実施、 r_8 については、 $r_n = l / 2n\pi$ を仮定し推定）。

Table 2 Results of Fourier coefficients by the Harmonic Analyzer.

n	Planimeter			S_n [cm]	C_n [cm]	A_n [cm]	ε_n [rad]
	elm	start	end				
2	sin	1121	1261	0.497	-1.94	2.00	-1.32
	cos	1466	1271				
3	sin	1307	1303	-0.040	-0.060	0.072	-2.16
	cos	1350	1344				
4	sin	1225	1159	-0.657	-0.756	1.00	-2.29
	cos	1326	1250				
8	sin	1187	1190	0.030	0.00	0.030	0.00
	cos	1091	1091				

5. 結 言

調和解析機の機構および原理を調べたところ、次の事柄が解明できた。

1. 調和解析器は大きく分けて二つの部分からなる。一つは波形データに正弦・余弦関数を乗じて被積分関数を発生する部分であり、もう一つがその被積分関数を積分する部分である。

2. 積分部分は一般的なプランメータを使用している。

3. 波形データに正弦・余弦関数を乗じる部分は、波形追跡ポイント F 点の動きとプランメータのトレース点の動きの関係を考察することにより、波形データに直接正弦・余弦関数を乗じず、積分の横軸の増分 dx に正弦・余

弦関数を乗じ波形データを積分していることが分かった。結果として、ポイント F 点を波形データに沿って時計回りに周回し元の位置まで戻ればプランメータはフーリエ係数に相当する量を算出すること、を明らかにした。

4. 例題として、第 1 周期(基本周波数)、第 2、第 4 周期成分(2 倍、4 倍周波数)の波を合成し作成した不規則波形データに対し、調和解析器を用いて周波数分析を行った。得られた全ての振幅に対する誤差は第 1 周期の振幅の 2%以下であり、位相差は 2 度以下であった。

5. 以上の結果より、本調和解析機は熟達した技師が扱えば誤差 0.5%以下の精度を出し得る解析器と思われる。

謝 辞

本調和解析器は、(株)クボタから造船資料保存委員会に寄付されたものである。この貴重な機器の保存に関して格別のご理解を示された(株)クボタ様に心よりお礼を申し上げます。又、造船資料保存委員会からは、この調査の機会を与えて頂き、かつ各種ご支援やケルビン卿に関する各種の情報を寄せて頂いた。本報告がそれらに応えられるものであることを願いながらお礼を申し上げます。

参 考 文 献

- 1) W. Thomson : Harmonic Analyzer, Proc Royal Society of London, Vol 27, pp 371-373, 1878.
- 2) 造船資料保存委員会:調和解析器調査会報告書, 日本船舶海洋工学会関西支部, 2015.
- 3) 水野善右ヱ門, 三木久夫:基礎物理学実験, 培風館, 1988.
- 4) 和田英一:面積計を使う調和解析器, <http://parametron.blogspot.jp/2013/07/blog-post.html>

付 録

ケルビン卿 (1824-1907) について

本報告で調査した調和解析機器は、Kelvin 卿の方式と違うものであるが、調和解析器を最初に開発した人は Kelvin 卿である¹⁾。

William Thomson が名前であるが、爵位を授けられてケルビン卿 (1st Baron Kelvin) と名乗るようになった。グラスゴー大学の近くを流れているケルビン川からとった名前と言われている。彼の名前は造船工学に関わっている人間にとっては良く知られている。船が静水中を航走した時に船の後方にできる波紋を素成波の重ね合わせで表現し、その波紋を計算する理論を示した人である。その波を「ケルビン波」として歴史にその名を刻印した英国の物理学者である。この考え方は船の造波抵抗の推定に大きな影響を及ぼした。

彼は、多くの工学的な機器を発明した人で、船に関する機器開発にも大きく貢献した人でもある。例えば、ケルビン卿は磁気コンパスで有名で、明治時代の日本の商船のほとんどにケルビン卿の磁気コンパスが搭載されていた。Thomson 式の通名で製品が出ており、神戸大学深江キャンパスの海事博物館に入って左側に Thomson 式のコンパスが展示されている。

ケルビン式測深儀も大正から昭和にかけて使用されていた。ガラス管の内部に重クロム酸カリを塗り、海中におろし、ガラス管の中に海水が入ると変色するのでそれにより水深を計測する方式である。更に、気圧計も開発

した等、多くの海事関係の特許を有していた。

ケルビンの名前が付いた「Kelvin Hughes Limited」という会社があり、戦後はレーダなどを手掛けていた。最近では、ECDIS (電子チャート) や、IBIS (Integrated Bridge Information System 総合ブリッジ・システム) などを手掛けている。即ち今でも彼の名前が付いた会社が健在である。この会社の歴史を調べると、以下のような記述がある。

「Kelvin Hughes 社は、英国の通信技術者 Kelvin 卿が 19 世紀半ばに設立した通信機器ビジネスと、18 世紀初頭から続く時計職人 Hughes 家が、1942 年に設立したジョイント・ベンチャー Marine Instruments Ltd. が基礎となっている。」